Vorlesung 5 Netzwerk-Analyse

Ein Netzwerk besteht aus mehreren Entitäten, die in Beziehung zueinander stehen.

Definition 5.1

Ein Graph $G=(V,E)$ ist ein Paar bestehend aus eine Menge von n Knoten:

$$V=\{1,\ldots,n\}$$

und eine Menge von Kanten:

$$E \subseteq \{\{i,j\} \mid i,j \in V,\ i \neq j\}.$$

(d.h. insbesondere behandeln wir hier ungerichtete Graphen)

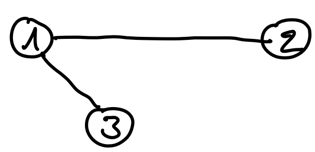
Falls $v \in V$ und für ein $u \in V$ gilt: $\{u,v\} \in E$, nennen wir v zu u adjazent. Die Adjazenzmatrix von G ist

$$A(G) := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $v \in V$ ist der Grad von v

$$\deg(v) := \#\{u \in V \mid \{u,v\} \in E\}$$

Beispiel 5.2. $V=\{1,2,3\}$, $E=\{\{1,2\},\{1,3\}\}$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \deg(1) = 2, \quad \deg(2) = \deg(3) = 1$$

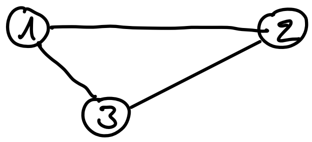
Annahme: In dieser Vorlesung nehmen wir an, dass

$$\deg(u) > 0 \quad \text{für alle } u \in V.$$

Definition 5.2

Wir sagen, dass $G=(V,E)$ komplett ist, falls
$$E = \{ \{i,j\} \mid i,j \in V,\ i \neq j \}.$$

Beispiel 5.3 Kompletter Graph für 3 Knoten:



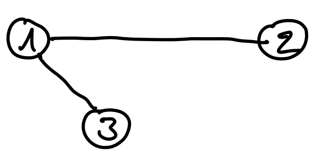
Definition 5.4

Ein Walk in $G=(V,E)$ ist eine Folge von Knoten
$$P = (v_0, v_1, \ldots, v_D)$$
so dass $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für $1 \leq i \leq D$. Die Kanten in P sind
$$E(P) = \{ \{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq D \}.$$
Die Länge von P ist $\# E(P) = D$.

Wir nennen G zusammenhängend, falls: Für alle $u,v \in V$ finden wir einen Walk von $v_0 = u$ nach $v_D = v$.

Falls $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, nennen wir P einen Pfad.

Beispiel 5.5.



Walk: $(3,1,2,1)$, aber kein Pfad!

Pfad: $(3,1,2)$.

Lemma 5.6

Sei A die Adjazenzmatrix von $G=(V,E)$ und seien $u,v \in V$.

Dann gilt:
$$\text{Anzahl der Walks von } u \text{ nach } v \text{ der Länge } k = (A^k)_{uv}$$

Beweis: Übung

Die Laplace-Matrix

Definition 5.7

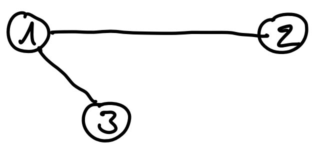
Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Die Laplace-Matrix von G is

$$L(G) = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad n = \#V.$$

mit:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \\ \frac{-1}{\sqrt{\deg(i)\deg(j)}}, & \text{falls } i\neq j \text{ und } \{i,j\}\in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 5.8.



$$L(G) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden fixieren wir einen Graph $G=(V,E)$ und bezeichnen

$$A = A(G), \qquad L := L(G).$$

Definition 5.9 Wir definieren $T = (t_{uv}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$t_{uv} = \begin{cases} \deg(u), & \text{falls } u=v \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T = \begin{pmatrix} \deg(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \deg(n) \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.10

Es gilt: $\quad L = 1_n - T^{-1/2} A T^{-1/2} \qquad \left(T^{-1/2} = \operatorname{diag}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\deg(i)}}\right)\right)\right)$

Beweis

Für $u \in V = \{1, \dots, n\}$, sei $e_u = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ (u-te Position)

Beachte, T ist symmetrisch: $T^T = T$. Dann gilt,

$$\begin{aligned}(T^{-1/2} A T^{-1/2})_{uv} &= e_u^T \, T^{-1/2} A T^{-1/2} e_v \\ &= (T^{-1/2} e_u)^T A \, (T^{-1/2} e_v) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\deg(u)}} e_u\right)^T A \left(\frac{1}{\sqrt{\deg(v)}} e_v\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \, e_u^T A e_v \\ &= \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \, A_{uv}\end{aligned}$$

und $A_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{u,v\} \in E \\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

Daher: $$(1_n - T^{-1/2} A T^{-1/2})_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u = v \\ 0, & \text{falls } u \neq v, \text{ und } \{u,v\} \notin E. \\ \frac{-1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}, & \text{falls } u \neq v, \ \{u,v\} \in E \end{cases}$$

$$= L_{uv}. \qquad \square$$

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n = \# V$, kann als Raum der Funktion

$$\mathcal{F}(V) := \{ f : V \to \mathbb{R} \}$$

verstanden werden. Die Korrespondenz ist:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } f(v) = x_v.$$

Mit dieser Sichtweise ist $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine lineare Abbildung

$L : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$, wobei

$$Lf(v) = \sum_{j=1}^{n} \ell_{vj} \cdot f(j) \quad , \qquad L = (\ell_{ij}). \qquad (*)$$

<u>Lemma 5.11</u> Die lineare Abbildung (*), die von L auf $\mathcal{F}(V)$ induziert wird, ist gegeben durch:

$$Lf(u) = \frac{1}{\sqrt{\deg(u)}} \sum_{\substack{v \in V: \\ \{u,v\} \in E}} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right) \quad , f \in \mathcal{F}(V),\ u \in V.$$

Funktion Lf ausgewertet an $u \in V$.

<u>Beweis</u>

Wir schreiben $\quad g := T^{-1/2} f.$

Nach Lemma 5.10 gilt: $\quad L = \mathbb{1}_n - T^{-1/2} A T^{-1/2}$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} Lf(u) &= \left((\mathbb{1}_n - T^{-1/2} A T^{-1/2}) \cdot f \right)(u) \\ &= f(u) - (T^{-1/2} A T^{-1/2} f)(u). \\ &= f(u) - (T^{-1/2} A \cdot g)(u). \end{aligned}$$

Es gilt:
$$\begin{aligned} (T^{-1/2} A \cdot g)(u). &= \frac{1}{\sqrt{\deg(u)}} (Ag)(u). \\ &= \frac{1}{\sqrt{\deg(u)}} \sum_{v=1}^{n} a_{uv}\, g(v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\deg(u)}} \sum_{v \in V:\ \{u,v\} \in E} g(v) \\ &= \sum_{v \in V:\ \{u,v\} \in E} \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad Lf(u) = f(u) - \sum_{v\in V:\ \{u,v\}\in E} \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}.$$

Jetzt verwenden wir, dass:

$$f(u) = \frac{\deg(u)\, f(u)}{\deg(u)} = \sum_{v\in V:\ \{u,v\}\in E} \frac{f(u)}{\deg(u)}$$

$$\Rightarrow \quad Lf(u) = \sum_{v\in V:\ \{u,v\}\in E} \frac{f(u)}{\deg(u)} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(u)}\sqrt{\deg(v)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\deg(u)}} \sum_{v\in V:\ \{u,v\}\in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right) \qquad \square$$

<u>Bemerkung</u>: L ist symmetrisch: $L = L^T$. Daher sind alle Eigenwerte von L reell.

<u>Definition 5.12</u>

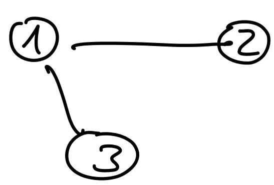
Die Eigenwerte von $L = L(G)$

$$\lambda_0 \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_{n-1}$$

heißen das <u>Spektrum</u> von G. Wir definieren

$$\lambda_G := \lambda_1 .$$

<u>Beispiel 5.13</u>



$$L = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ hat Eigenwerte $0, 1, 2$.

__Definition 5.14__

Wir definieren ein inneres Produkt auf $\mathcal{F}(V)$ via:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{v \in V} f(v) \cdot g(v),$$

__Theorem 5.15__

Der __Rayleigh-Quotient__ von L für $f \in \mathcal{F}(V)$ ist

$$\frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{1}{\sum_{u \in V} f(u)^2} \sum_{\{u,v\} \in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right)^2$$

__Bemerkung__: Warum ist der Rayleigh-Quotient wichtig?

Mit seiner Hilfe können wir die λ_i beschreiben:

$$\lambda_i = \frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle f, f \rangle}$$ für f ein Eigenvektor von L zum EW λ_i.

Theorem 5.15 beweisen wir Donnerstag.

Theorem 5.15 zeigt, dass $(f, g) \mapsto \langle f, Lg \rangle$ eine positiv semi-definite Form, weil alle EW von L nichtnegativ sind!

$$0 \le \lambda_0 \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_{n-1}$$

Außerdem zeigt es auch, dass $\lambda_0 = 0$.

__Proposition 5.16__ Sei G ein Graph mit $n = \# V$.

1) Falls G komplett ist, gilt: $\lambda_k = \frac{n}{n-1}$ für alle $k \ge 1$.
2) Falls G bipartit komplett ist, gilt: $\lambda_k = 1$ für $1 \le k \le n-1$, $\lambda_{n-1} = 2$.
3) Falls G ein Pfad ist, gilt: $\lambda_k = 1 - \cos \frac{k\pi}{n-1}$ __Beweis__
4) Falls G ein Kreis ist, gilt: $\lambda_k = 1 - \cos \frac{2k\pi}{n-1}$ Übung.