Vorlesung 6 Netzwerk-Analyse cont'd

- In der letzten VL haben wir die Laplace Matrix $L(G)$ für einen Graphen $G=(V,E)$ definiert.

  Diese induziert eine lineare Abb.

$$L: \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V),$$

wobei $\mathcal{F}(V) = \{f: V \to \mathbb{R}\}$. Für $f \in \mathcal{F}(V)$ gilt:

$$Lf(u) = \frac{1}{\sqrt{\deg(u)}} \sum_{v \in V:\ \{u,v\} \in E} \frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \, . \qquad (*)$$

- Wir haben außerdem das inner Produkt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{u \in V} f(u) g(u)$$

  auf $\mathcal{F}(V)$ definiert.

Theorem 6.1

Für $f \in \mathcal{F}(V)$ gilt:

$$\frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{1}{\sum_{u \in V} f(u)^2} \sum_{\{u,v\} \in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right)^2 .$$

Beweis

Es ist zu zeigen, dass $\langle f, Lf \rangle = \sum_{\{u,v\} \in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right)^2$

Es ist

$$\langle f, Lf \rangle = \sum_{u \in V} f(u) \cdot Lf(u)$$

$$= \sum_{u \in V} f(u) \frac{1}{\sqrt{\deg(u)}} \sum_{v \in V:\ \{u,v\} \in E} \frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}}$$

Wir setzen: $g := T^{-1/2} f$, wobei $T = \operatorname{diag}(\deg(u))_{u \in V}$.

Dann: $\langle f, Lf \rangle = \sum_{u \in V} g(u) \sum_{v \in V:\ \{u,v\} \in E} \big(g(u) - g(v) \big)$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{u\in V} \sum_{v \in V: \{u,v\}\in E} g(u)\,(g(u)-g(v))\Big)$$

$$- \frac{1}{2}\Big(\sum_{v\in V} \sum_{u \in V \{u,v\}\in E:} g(v)\,(g(u)-g(v))\Big)$$

$$= \sum_{\{u,v\}\in E} (g(u)-g(v))^2$$

Wir ersetzen jetzt g durch f:

$$\langle f, Lf\rangle = \sum_{\{u,v\}\in E} \Big(\frac{f(u)}{\sqrt{deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{deg(v)}} \Big)^2$$

$\square$

<u>Korollar 6.2</u>

Das Spektrum von G (= die Eigenwerte von $L(G)$) sind nicht negativ

<u>Beweis</u>

Sei $\lambda \in$ EW von L mit EV $f \in \mathcal{F}(V)$. Dann gilt:

$$0 \leq \frac{\langle f, Lf\rangle}{\langle f, f\rangle} = \frac{\langle f, \lambda f\rangle}{\langle f, f\rangle} = \lambda$$

<u>Korollar 6.3</u>

Der kleinste Eigenwert von $L(G)$ ist $\lambda_0 = 0$ mit Eigenvektor:

$$T^{1/2} e,$$

$e = (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^{|V|}$ (bzw. $e(u) = 1$ für alle $u \in V$).

<u>Beweis:</u>

Es gilt für $f = T^{1/2} e$: $\langle f, Lf\rangle =$

$$\sum_{\{u,v\}\in E} (1 - 1)^2 = 0.$$

$\Rightarrow Lf = 0$. (da L positiv-semidefinit).

Das Spektrum eines Graphen

Ab jetzt fixieren wir einen Graphen $G=(V,E)$, $n:=|V|$.

Wir setzen

$$L := L(G)$$

und

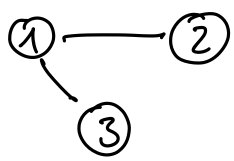
$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}, \qquad \lambda_G := \lambda_1.$$

seien die EW von L (= das Spektrum von G).

Theorem 6.4

1) $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} = n$
2) $\lambda_G \leq \frac{n}{n-1} \leq \lambda_{n-1}$
3) Falls G nicht komplett ist, gilt: $\lambda_G \leq 1$.
   Falls G komplett ist, gilt: $\lambda_G = \frac{n}{n-1}$
4) $\lambda_i = 0$ und $\lambda_{i+1} > 0$ genau dann, wenn G genau $i+1$ Zusammenhangskomponenten hat.
5) $\lambda_{n-1} \leq 2$. Außerdem: $\lambda_{n-1} = 2$ genau dann, wenn eine der Zusammenhangskomp. von G bipartit.
6) Das Spektrum von G ist die Vereinigung der Spektra seiner Zusammenhangskomponenten.

Beispiel:

$G =$ 

Das Spektrum von G ist $0, 1, 2$.

Beweis

1) Es gilt: $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} = \mathrm{Trace}(L) = \sum_{i=1}^{n} L_{ii} = 1 + 1 + \dots + 1 = n$
2) Nach Korollar 6.3 gilt: $\lambda_0 = 0$.

$$\rightarrow \quad n = \lambda_G + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} \geq (n-1)\lambda_G \quad \Longrightarrow \quad \lambda_G \leq \frac{n}{n-1}$$

und $\quad n = \lambda_G + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} \leq (n-1)\lambda_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n-1} \geq \frac{n}{n-1}$

3) Falls G komplett ist, $\lambda_G = \frac{n}{n-1}$ $\rightsquigarrow$ siehe Übung.

Falls G nicht komplett existieren $u, v \in V$ mit $\{u,v\} \notin E$.

Wir definieren $f \in \mathcal{F}(V)$ mit

$$f(i) = \begin{cases} \sqrt{\deg(u)}, & i = v \\ -\sqrt{\deg(v)}, & i = u \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad i \in V$$

Erinnerung: $T^{1/2} e \in \ker L$. Daher gilt:

$$\lambda_G = \min_{g \in \mathcal{F}(V) \setminus \{0\}: \langle g, T^{1/2} e \rangle = 0} \frac{\langle g, Lg \rangle}{\langle g, g \rangle}$$

Es gilt:
$$\langle f, T^{1/2} e \rangle = f(u) \cdot (T^{1/2} e)(u) + f(v) \cdot (T^{1/2} e)(v)$$
$$= -\sqrt{\deg(v)}\sqrt{\deg(u)} + \sqrt{\deg(u)}\sqrt{\deg(v)} = 0$$

Daher:
$$\lambda_G \leq \frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{1}{\sum_{u \in V} f(u)^2} \sum_{\{i,j\} \in E} \left(\frac{f(i)}{\sqrt{\deg(i)}} - \frac{f(j)}{\sqrt{\deg(j)}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{\deg(u) + \deg(v)} \sum_{i \in V: \{u,i\} \in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(i)}{\sqrt{\deg(i)}} \right)^2$$
$$+ \sum_{j \in V: \{v,j\} \in E} \left(\frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} - \frac{f(j)}{\sqrt{\deg(j)}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{\deg(u) + \deg(v)} \cdot \sum_{i \in V: \{u,i\} \in E} \frac{\deg(v)}{\deg(u)} + \sum_{j \in V: \{v,j\} \in E} \frac{\deg(u)}{\deg(v)}$$
$$\leq \frac{1}{\deg(u) + \deg(v)} \left(\deg(v) + \deg(u) \right) = 1$$

4) Sei $f \in \ker L$. Dann gilt:

$$0 = \frac{\langle f, Lf\rangle}{\langle f, f\rangle} = \frac{1}{\sum_{u\in V} f(u)^2} \sum_{\{u,v\}\in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}}\right)^2$$

Sei $g = T^{-1/2} f$, dann muss gelten:

$$g(u) = g(v) \quad \text{für alle } \{u,v\}\in E.$$

Seien nun $i,j \in V$ und P ein Pfad von i nach j.
Dann muss g auf P konstant sein, d.h. $g|_P = a \cdot e|_P$ $a \in \mathbb{R}$, $e(u) = 1$, $u \in V$.

$$\Rightarrow f|_P = a \cdot T^{1/2} e|_P$$

$\Rightarrow$ g muss auf jeder Zusammenhangskomponente konstant sein.
Insbesondere, falls es nur eine Zusammenhangskomp. gibt, ist $\ker L$ ein-dimensional. $\Rightarrow$ Falls G zshg., gilt: $\lambda_G > 0$.
Für mehrere Zusammenhangskomp. folgt die Aussage aus 6).

5) Beobachtung: für alle $g \in \mathcal{F}(V)$ und $u,v \in V$ gilt:

$$0 \le (g(u)+g(v))^2 = g(u)^2 + 2g(u)g(v) + g(v)^2$$

$$\Rightarrow (g(u)-g(v))^2 = g(u)^2 - 2g(u)g(v) + g(v)^2 \le 2(g(u)^2 + g(v)^2)$$

Sei wieder $g = T^{-1/2} f$. Dann gilt:

$$\lambda_{n-1} = \max_{f\in \mathcal{F}(V)\setminus\{0\}} \frac{\langle f, Lf\rangle}{\langle f,f\rangle} = \frac{1}{\sum_{u\in V} \deg(u)\, g(u)^2} \sum_{\{u,v\}\in E} (g(u)-g(v))^2$$

$$\le \frac{2}{\sum_{u\in V} \deg(u)\, g(u)^2} \sum_{\{u,v\}\in E} g(u)^2 + g(v)^2 = 2,$$

weil $\deg(u) = \sum_{v \in V:\ \{u,v\} \in E} \cdot 1$

$$\Rightarrow \sum_{u \in V} \deg(u)\, g(u)^2 = \sum_{u \in V,\ v \in V:\ \{u,v\} \in E} g(u)^2$$

$$= \sum_{\{u,v\} \in E} g(u)^2 + g(v)^2$$

Nach der obigen Herleitung gilt: $\lambda_{n-1} = 2$ gdw $(g(u)+g(v))^2 = 0$ für alle $\{u,v\} \in E$.

D.h. $\lambda_{n-1} = 2 \Leftrightarrow g(u) = -g(v)$ für alle $\{u,v\} \in E$.

Falls G eine bipartite Komponente $H = (V', E')$ hat mit $V' = V_1 \cup V_2$, so dass E' nur aus Kanten zwischen V_1 und V_2 besteht, finden wir:

$$g(u) = \begin{cases} 1, & \text{falls } u \in V_1 \\ -1, & \text{falls } u \in V_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \lambda_{n-1} = 2.$$

Andererseits, falls $g \in \mathcal{F}(V)$ existiert, mit $g(u) = -g(v)$ für alle $\{u,v\} \in E$, sei $H = (V', E')$ eine Komponente von G, auf der g nicht verschwindet.
Setze dann $V_1 := \{v \in V' \mid g(v) < 0\}$
$V_2 := \{v \in V' \mid g(v) > 0\}$.

Dann bestehen nur Kanten in E' zwischen V_1 und V_2 $\Rightarrow$ H ist bipartit.

6) Seien $G_1, \dots, G_k$ die Zusammenhangskomponenten von G.
Nach neuer Nummerierung der Knoten können wir annehmen, dass $G_i = (V_i, E_i)$ mit

$$V_i = \{ n_{i-1}+1, \ldots, n_i \}, \quad 0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k = n.$$

In diesem Fall hat L eine Blockmatrixform:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & & & 0 \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L_k \end{bmatrix} \qquad L_i \in \mathbb{R}^{|V_i| \times |V_i|}$$

die Laplace-Matrix von G_i

$\rightarrow$ Eigenwerte von L = Vereinigung der Eigenwerte der L_i.
(weil $\det(L - \lambda \mathbb{1}_n) = \prod_{i=1}^{k} \det(L_i - \lambda \mathbb{1}_{|V_i|})$.) $\square$

<u>Definition 6.5</u>

Sei $G = (V,E)$ ein Graph. Das <u>Volumen</u> von G ist

$$\mathrm{vol}(G) := \sum_{u \in V} \deg(u).$$

<u>Proposition 6.6</u>

Sei $G = (V,E)$ ein Graph, λ_G, λ_{n-1} wie oben.
Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei Teilgraphen mit $V = V_1 \cup V_2$, und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, und $E_j = \{ \{u,v\} \in E \mid u,v \in V_j \}$, $j = 1,2$.
Sei

$$\varepsilon := \# \{ \{u,v\} \in E \mid u \in V_1, v \in V_2 \}$$

Dann:

$$\lambda_G \leq \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{vol}(G)}{(\mathrm{vol}(G_1)+\varepsilon)(\mathrm{vol}(G_2)+\varepsilon)} \leq \lambda_{n-1}.$$