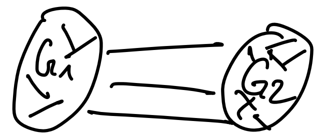
Vorlesung 7 — Netzwerk-Analyse cont'd

Von letzter VL: Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Das Volumen von G ist definiert als

$$\mathrm{vol}(G) := \sum_{v\in V} \deg(v) = 2\cdot |E|$$

Theorem 7.1

Sei $G=(V,E)$ ein Graph, $n=|V|$ und λ_G, λ_{n-1} wie in der letzten VL (λ_G, λ_{n-1} = EW von $L(G)$). Seien $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ zwei Teilgraphen von G, s.d.



- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $E_j = \{\{u,v\}\in E \mid u,v\in V_j\}$, $j=1,2$.

Sei weiterhin

$$\varepsilon = \#\{\{u,v\}\in E \mid u\in V_1, v\in V_2\}$$

Dann gilt:

$$\lambda_G \le \varepsilon \frac{\mathrm{vol}(G)}{(\mathrm{vol}(G_1)+\varepsilon)(\mathrm{vol}(G_2)+\varepsilon)} \le \lambda_{n-1}.$$

Bemerkung: (1) Falls G nicht zusammenhängend ist und G_1, G_2 zwei Zusammenhangskomp. sind gilt: $\varepsilon = 0$

$\rightarrow \lambda_G = 0$.

(2) Falls G bipartit ist mit Komponenten G_1, G_2:

$\mathrm{vol}(G_1) = \mathrm{vol}(G_2) = 0$ und $\varepsilon = |E| = \frac{\mathrm{vol}(G)}{2}$

Dann: $\varepsilon \dfrac{\mathrm{vol}(G)}{(\mathrm{vol}(G_1)+\varepsilon)(\mathrm{vol}(G_2)+\varepsilon)} = 2$

Beweis von Thm 7.1

Sei $m_i := vol(G_i) + \mathcal{E}$. Dann gilt für $i \neq j$:

$$\sum_{u \in V_i} deg(u) = \sum_{u \in V_i} \Big[\sum_{v \in V_i : \{u,v\} \in E} 1 + \sum_{v \in V_j : \{u,v\} \in E} 1 \Big]$$

$$= vol(G_i) + \mathcal{E} = m_i$$

Dies zeigt: $vol(G) = m_1 + m_2$.

Wir definieren eine Funktion $f \in \mathcal{F}(V)$. (d.h.: $f: V \to \mathbb{R}$) wie folgt:

$$f(u) = \begin{cases} m_2 \cdot \sqrt{deg(u)}, & \text{falls } u \in V_1 \\ -m_1 \cdot \sqrt{deg(u)}, & \text{falls } u \in V_2 \end{cases}$$

Dann gilt: $(e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{|V|}$, Erinnerung: $T^{1/2} e \in \ker L(G)$:))

$$\langle f, T^{1/2} e \rangle = \sum_{u \in V_1} f(u) e(u) + \sum_{u \in V_2} f(u) e(u)$$

$$= \sum_{u \in V_1} m_2 \deg(u) - \sum_{u \in V_2} m_1 \deg(u)$$

$$= m_2 \sum_{u \in V_1} \deg(u) - m_1 \sum_{u \in V_2} \deg(u)$$

$$= m_2 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0$$

Es gilt:
$$\lambda_G = \min_{g \in \mathcal{F}(V) : \langle g, T^{1/2} e \rangle = 0} \frac{\langle g, Lg \rangle}{\langle g, g \rangle}$$

$$\lambda_{n-1} = \max_{g \in \mathcal{F}(V)} \frac{\langle g, Lg \rangle}{\langle g, g \rangle}$$

Daher:
$$\lambda_G \leq \frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle f, f \rangle} \leq \lambda_{n-1}$$

Es gilt: $$\frac{\langle f, Lf\rangle}{\langle f,f\rangle} = \frac{1}{\sum_{u\in V} f(u)^2} \sum_{\{u,v\}\in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right)^2$$

für $$f(u) = \begin{cases} m_2 \cdot \sqrt{\deg(u)}, & \text{falls } u \in V_1 \\ -m_1 \cdot \sqrt{\deg(u)}, & \text{falls } u \in V_2 \end{cases}$$

Es gilt: falls $u,v\in V_1$: $$\left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right)^2 = (m_2 - m_2)^2 = 0$$

$u,v \in V_2$: $$\left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right)^2 = \left(-m_1 + (-m_1)\right)^2 = 0$$

und somit:

$$\frac{\langle f, Lf\rangle}{\langle f,f\rangle} = \frac{1}{\sum_{u\in V} f(u)^2} \sum_{u\in V_1} \sum_{v\in V_2 : \{u,v\}\in E :} (m_1+m_2)^2$$

$$= \frac{1}{\sum_{u\in V} f(u)^2} \operatorname{vol}(G)^2 \cdot \varepsilon$$

$$= \frac{\operatorname{vol}(G)^2 \cdot \varepsilon}{\sum_{u\in V_1} f(u)^2 + \sum_{u\in V_2} f(u)^2} = \frac{\operatorname{vol}(G)^2 \cdot \varepsilon}{m_2^2 \sum_{u\in V_1} \deg(u) + m_1^2 \sum_{u\in V_2} \deg(u)}$$

$$= \frac{\operatorname{vol}(G)^2 \cdot \varepsilon}{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}$$

weil:
$m_1 + m_2 = \operatorname{vol}(G)$
und
$(m_1+m_2) m_1 m_2$
$= m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2$

$$= \frac{\operatorname{vol}(G)}{m_1 \cdot m_2} \varepsilon$$

$\square$