Vorlesung 8 Netzwerk-Analyse cont'd

Proposition 8.1

Sei $G=(V,E)$ ein zusammenhängender Graph und sei

$$\operatorname{diam}(G) := \max\{\text{Längen von kürzesten Pfaden in } G\}$$

Dann gilt:

$$\lambda_G \geq \frac{1}{\operatorname{diam}(G)\cdot \operatorname{vol}(G)}$$

Beweis

Sei $0 \neq f \in \mathcal{F}(V)$ ein Eigenvektor von λ_G mit $\langle f, T^{1/2}e\rangle = 0$.
Sei $g := T^{-1/2} f$. Dann gilt:

$$0 = \langle f, T^{1/2}e\rangle = \langle T^{+1/2} g, T^{1/2}e\rangle$$
$$= \langle Tg, e\rangle = \sum_{u\in V} \deg(u)\, g(u) \quad (*)$$

Sei $v_0 \in V$ mit $|g(v_0)| = \max_{v\in V} |g(v)|$. Die Gleichung $(*)$ impliziert, dass ein $u_0 \in V$ existiert mit

$$g(v_0)\, g(u_0) < 0.$$

Sei nun P ein kürzester Pfad von u_0 nach v_0. Sei D die Länge von P. Dann gilt:

$$\frac{1}{D\cdot \operatorname{vol}(G)} \geq \frac{1}{\operatorname{diam}(G)\cdot \operatorname{vol}(G)}$$

Wir zeigen, dass $\lambda_G \geq (D \operatorname{vol}(G))^{-1}$. Es gilt:

$$\lambda_G = \frac{\langle f, Lf\rangle}{\langle f, f\rangle} = \frac{1}{\sum_{u\in V} f(u)^2} \sum_{\{u,v\}\in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}}\right)^2.$$

$$= \frac{1}{\sum_{u\in V} \deg(u) g(u)^2} \sum_{\{u,v\}\in E.} (g(u) - g(v))^2$$

$$\geq \frac{1}{g(v_0)^2 \operatorname{vol}(G)} \sum_{\{u,v\}\in E(P)} (g(u) - g(v))^2$$

Sei nun $a = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^D$ und für $P = (v_0, v_1, \ldots, v_D = u_0)$

$$b = (g(v_1) - g(v_0), g(v_2) - g(v_1), \ldots, g(v_D) - g(v_{D-1}))^T \in \mathbb{R}^D$$

Nach Cauchy-Schwartz:

$$D \cdot \sum_{\{u,v\}\in E(P)} (g(u) - g(v))^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \geq (a^T b)^2 = (g(v_0) - g(u_0))^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \lambda_G \geq \frac{1}{g(v_0)^2 \operatorname{vol}(G)} \frac{(g(v_0) - g(u_0))^2}{D}$$

Es gilt außerdem: $(g(v_0) - g(u_0))^2$

$$= g(v_0)^2 - 2 g(v_0) g(u_0) + g(u_0)^2$$

$$\geq g(v_0)^2$$

$$\rightarrow \quad \lambda_G \geq \frac{1}{D \operatorname{vol}(G)}.$$

$\square$

<u>Theorem 8.2</u> (Satz von Kirchhoff)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $u \in V$.

Sei L_u die $(n-1)\times(n-1)$-Untermatrix von $L(G)$ $(n = |V|)$, die entsteht, wenn wir die u-te Zeile und u-te Spalte entfernen. Dann gilt:

$$\det(L_u) = \frac{\#\text{ Spannbäume in } G}{\prod_{v\in V,\, v\neq u} \deg(v)}.$$

<u>Bemerkung</u> Für $\mathcal{L} = T - A$ (d.h. $\mathcal{L} = T^{1/2} L T^{1/2}$) gilt dann:

$$\det(\mathcal{L}_u) = \# \text{ Spannbäume in } G.$$

<u>Beweis</u>

Wir definieren die Matrix $S = (s_{ue}) \in \mathbb{R}^{|V| \times |E|}$ mit:

$$s_{u\{i,j\}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } u \neq i \text{ und } u \neq j. \\ \frac{1}{\sqrt{\deg(u)}}, & \text{falls } u = i < j. \\ -\frac{1}{\sqrt{\deg(u)}}, & \text{falls } u = i > j. \end{cases}$$

Es gilt für $f \in \mathcal{F}(V)$:

$$\langle S^T f, S^T f \rangle = \sum_{\{u,v\} \in E} \left(\frac{f(u)}{\sqrt{\deg(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\deg(v)}} \right)^2$$

$$= \langle f, Lf \rangle$$

$$\Rightarrow \quad SS^T = L.$$

Sei nun $S_u \in \mathbb{R}^{|V|-1 \times |E|}$ die Matrix, die wir erhalten, wenn wir von S die u-te Zeile entfrnen.

Dann:

$$S_u S_u^T = L_u$$

Die Cauchy-Binet-Formel sagt:

$$\det(L_u) = \sum_{\substack{B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \\ B \text{ ist eine Untermatrix von } S_u}} \det(B)^2$$

Sei nun $B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ eine feste Untermatrix von S_u.

Die Spalten von B sind durch $(n-1)$ Kanten gelabelt.

Seien diese Kanten $E_1, \dots, E_{n-1}$.

Sei $\mathcal{T}$ der Untergraph von G, der durch die E_i aufgespannt wird.

Falls $\mathcal{T}$ kein Spannbaum ist, muss es einen Kreis enthalten, d.h. $\mathcal{T}$ enthält einen Walk der Form $(v_0, v_1, \dots, v_D)$ mit $v_D = v_0$, $D \le n-1$. Wir können annehmen, dass

$$E_i = \{v_{i-1}, v_i\}, \quad 1 \le i \le D.$$

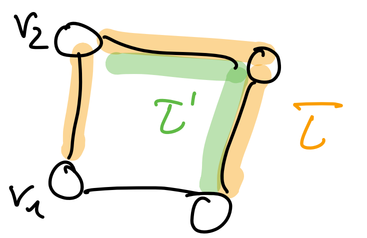
Dann gilt aber für die Spalten von B bzgl. $E_1, \dots, E_D$:

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\deg(v_0)}} \\ -\frac{1}{\sqrt{\deg(v_1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\deg(v_1)}} \\ -\frac{1}{\sqrt{\deg(v_2)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\deg(v_0)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\deg(v_{D-1})}} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\det(B) = 0$ (weil Spalten nicht lin. unabh.).

Falls andererseits $\mathcal{T}$ ein Spannbaum ist, existiert ein Knoten $v_1 \in V \setminus \{u\}$ mit Grad 1 in $\mathcal{T}$.

Ohne Einschränkung: $v_1 \in E_1$, $v_1 \notin E_i$, $i \ge 2$.



Nachdem wir v_1 aus $\mathcal{T}$ entfernt haben, erhalten wir einen Baum $\mathcal{T}'$ mit $n-2$ Kanten und finden einen Knoten $v_2 \in V \setminus \{v_1, u\}$ mit Grad 1 in $\mathcal{T}'$

$\rightsquigarrow$ Nach Permutation der Spalten und Zeilen können wir B in eine obere Dreiecksform bringen.

Auf der Diagonale stehen $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{\deg(v)}} \right)_{v \in V \setminus \{u\}}$.

$$\Rightarrow \quad \det(B)^2 = \prod_{v \in V \setminus \{u\}} \frac{1}{\deg(v)}$$

Insgesamt:

$$\det(L_u) = \sum_{\substack{B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} \\ B \text{ Untermatrix von } S_u \\ B \text{ definiert Spannbaum}}} \prod_{v \in V \setminus \{u\}} \frac{1}{\deg(v)}$$

$$= \frac{\# \text{ Spannbäume in } G}{\prod_{v \in V \setminus \{u\}} \deg(v)}. \qquad \square.$$

Markov-Prozesse in Netzwerken

In manchen Situation sind Netzwerke zu groß, als dass wir alle Knoten und Kanten im entsprechenden Graph gleichzeitig behandeln können. Eine Alternative bieten stochastische, mit denen wir Netzwerke erkunden können. In dieser VL behandeln wir einen bestimmten Typ solcher Prozesse, nämlich Markov-Prozesse.

<u>Definition</u> 8.3 Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Ein Markov-Prozess X auf G ist eine Folge von Zufallsvariablen

$$X_0, X_1, X_2, \ldots \in V$$

genannt Schritte von X, s.d. für alle $i \geq 1$ gilt:

1) $P(X_i = u \mid X_{i-1} = v, X_{i-2} = v_{i-2}, \ldots, X_0 = v_0) = P(X_i = u \mid X_{i-1} = v)$

2) $P(X_i = u \mid X_{i-1} = v)$ hängt nicht von i ab.

3) $P(X_i = u \mid X_{i-1} = v) > 0$ nur falls $\{u, v\} \in E$ oder $u = v$.

Im Folgenden definieren wir:

$$P(u \mid v) := P(X_i = u \mid X_{i-1} = v) \quad \text{für } i \geq 1.$$

<u>Definition</u> 8.4

Sei X ein Markov-Prozess auf G. Die Übergangsmatrix von X ist

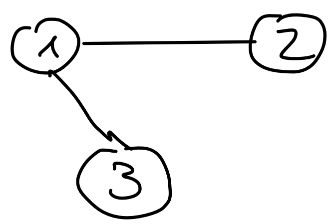
$$P = (p_{uv}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad n = |V|.$$

mit

$$p_{uv} = P(u \mid v).$$

Die p_{uv} heißen Übergangswahrscheinlichkeiten.

<u>Beispiel</u> 8.5



Dann gilt:

$$P = \begin{pmatrix} r & q & p \\ s & 1-q & 0 \\ 1-r-s & 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

mit $r, s \geq 0$ $r + s \leq 1$.

$0 \leq q \leq 1$, $0 \leq p \leq 1$

z.B.: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, hier wären dann die Wahrscheinlichkeit stehen zu bleiben immer gleich 0.