Vorlesung 9 Markov-Prozesse in Netzwerken

Erinnerung Ein Markov Prozess X auf einem Graphen $G=(V,E)$ ist eine Folge von Zufallsvariablen
$n = |V|$

$$X_0, X_1, X_2, \ldots \in V$$

s.d.:

1) $P(X_i=u \mid X_{i-1}=v, X_{i-2}=v_{i-2}, \ldots, X_0=v_0) = P(X_i=u \mid X_{i-1}=v)$
2) $P(X_i=u \mid X_{i-1}=v) \boxed{=: P(u|v)}$ ist unabh. von i
3) $P(u|v)>0$ nur, falls $\{u,v\}\in E$ oder $u=v$.

Die Übergangsmatrix von X ist $P=(p_{uv})$, $p_{uv}=P(u|v)$

Lemma 9.1

Sei $e=(1,\ldots,1)^T\in\mathbb{R}^n$ und $P=(p_{uv})$ die Übergangsmatrix eines Markov-Prozesses auf G. Dann gilt:

$$P^T e = e$$

(Erinnerung: $x\in\mathbb{R}^n \longleftrightarrow f\in \mathcal{F}(V)$)

Beweis

Wir haben für $v\in V$: $(P^T e)(v) = \sum_{u\in V} p_{uv}\cdot e(u) = \sum_{u\in V} p_{uv} = \sum_{u\in V} P(u|v) = 1 = e(v)$ $\square$

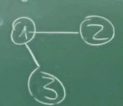
Definition 9.2

Wir nennen X den uniformen Markov-Prozess, falls die Übergangswkt. wie folgt sind:

$$P(u|v) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(v)}, & \text{falls } u\neq v \text{ und } \{u,v\}\in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(D.h.: $P=AT^{-1}$)

Beispiel 9.3



uniform MP hat Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemma 9.4

Sei X ein Markov-Prozess auf G mit Übergangsmatrix P. Sei $i\geq 0$ und $f_i = (P(X_i=1), \ldots, P(X_i=n)) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$f_{i+k} = P^k \cdot f_i$$

für alle $k\geq 0$.

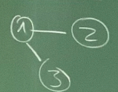
Beweis Sei $u\in V$. Dann gilt: $(P f_i)(u) = \sum_{v\in V} p_{uv}\cdot f_i(v) = \sum_{v\in V} P(X_{i+1}=u \mid X_i=v)\, P(X_i=v) \stackrel{\text{Gesetz der totalen Wkt.}}{=} P(X_{i+1}=u) = f_{i+1}(u)$

Daher: $P^k f_i = P^{k-1}(P f_i) = P^{k-1} f_{i+1} = \ldots = f_{i+k}$. $\square$

Bemerkung $(P^k)_{uv}$ = Wahrscheinlichkeit nach k Schritten bei u zu sein gegeben dass wir bei v starten

Vorlesung 9 Markov-Prozesse in Netzwerken

Beispiel 9.5



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Definition 9.6

Sei X ein Markov-Prozess auf G mit Übergangsmatrix $P=(p_{uv})\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Wir nennen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\pi: V\to\mathbb{R} \quad (\text{d.h. } \textstyle\sum_{v\in V}\pi(v)=1,\ \pi(v)\geq 0 \text{ für alle } v)$$

1) stationär bzgl. P, falls $P\pi = \pi$
2) reversibel bzgl. P, falls $\pi(v)\cdot p_{uv} = \pi(u)\cdot p_{vu}$ für alle $u,v\in V$.

i.A. Falsch

~~**Lemma 9.7**~~

~~Sei X ein Markov-Prozess auf G. Dann hat X eine stationäre Ver~~

~~**Beweis**~~

~~Nach Lemma 9.1 gilt: $P^T e = e$. $\Rightarrow P^T$ hat d~~
~~Eigenwert~~

~~$\Rightarrow P$ hat den Eigenwert 1.~~

~~$\Rightarrow$ es existiert $\pi\in\mathbb{R}^n$ mit $P\pi=\pi$.~~

~~Noch z.z.: $\pi(v)\geq 0$ für alle~~

~~Dann: $\sum_{v\in V}\pi(v)\neq 0 \Rightarrow \pi' :=$~~

Ein stochastischer Prozess mit eindeutiger stationärer Verteilung heißt ergodisch.

Proposition 9.8

Sei X ein Markov-Prozess auf G mit Übergangsmatrix P. Sei $\pi: V\to\mathbb{R}$ reversibel bzgl. P. Dann ist X auch eine stationäre Verteilung von X.

Beweis

Für $u\in V$ gilt:

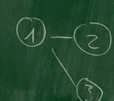
$$(P\pi)(u) = \sum_{v\in V} p_{uv}\,\pi(v) = \sum_{v\in V} p_{vu}\cdot\pi(u) = \pi(u)\,(P^T e)(u) \stackrel{\text{Lem 9.1}}{=} \pi(u) \quad \square$$

$\sum_{v\in V} p_{vu} = \sum_{v\in V} p_{vu}\cdot e(v)$

Beispiel 9.9

Die Verteilung $\pi: V\to\mathbb{R}$ mit $\pi(u) = \frac{\deg(u)}{\mathrm{vol}(G)}$ ist stationäre Verteilung vom uniformen Markove-Prozes.

Für:



$\mathrm{vol}(G)=4$

$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$

$$P\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \pi \ ✓$$

Definition 9.10

Sei X ein Markov-Prozess auf G mit Übergangsmatrix P.

1) X heißt aperiodisch, falls
$$\mathrm{ggT}\left(\{t \in \mathbb{N} \mid (P^t)_{u,u} > 0\}\right) = 1$$
für alle $u \in V$.

2) X heißt irreduzibel, falls für alle $u, v \in V$ ein $t \in \mathbb{N}$ existiert mit $(P^t)_{u,v} > 0$.

Bemerkung. Falls wir einen irreduziblen MP auf G finden, muss G notwendigerweise zusammenhängend sein.

Theorem 9.11

Sei X ein aperiodischer und irreduzibler Markov-Prozess auf G. Sei P die Übergangsmatrix von X. Dann gilt:

1) X hat eine stationäre Verteilung $\pi : V \to \mathbb{R}$.

2) $\lim_{k \to \infty} P^k = \pi e^T$, $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

3) Für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen $f : V \to \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{k \to \infty} (P^k f) = \pi$