Vorlesung 11 Zentralitätsmaße

Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

In den letzten Vorlesungen haben wir Funktion $f \in \mathcal{F}(V)$ behandelt.

- Wir haben f benutzt, um Knoten $v \in V$ anhand $f(v)$ zu klassifizieren (z.B. ob $f(v)>0$ oder $f(v)<0$).
- Wir haben f danach als Wkt.-Verteilung interpriert.

Heute: Dritte Perspektive.

Wir nehmen $f \in \mathcal{F}_+(V) := \{ f \in \mathcal{F}(V) \mid f(u) \geq 0 \text{ für alle } u \in V \}$ und interpretieren f als Bewertung. D.h. $f(u) > f(v)$ heißt "u ist wichtiger als v".

Erstes Beispiel: Page Rank.

Definition 11.1

Wir nennen $f_R \in \mathcal{F}_+(V)$ einen Page-Rank von G, falls f_R folgende Gleichungen erfüllt:

$$f_R(u) = \sum_{v \in V:\, \{u,v\} \in E} \frac{f_R(v)}{\deg(v)} \quad \text{für alle } u \in V. \qquad (*)$$

Bemerkung: Falls f_R ein Page-Rank von G ist, so auch $\lambda \cdot f_R$ für $\lambda > 0$.

Proposition 11.2

Falls G zusammenhängend ist und nicht bipartit ist, existiert f_R und ist eindeutig bestimmt bis auf Skalierung.

Beweis

Wir schreiben die Gleichung (*) als $f = P \cdot f$ mit

$$P = (p_{uv}) \quad \text{und} \quad p_{uv} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(v)}, & \text{falls } \{u,v\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte: P ist Übergangsmatrix des uniformen Markov-Prozesses X!

Aus der Übung wissen wir: Da G zusammenhängend, ist X irreduzibel.

Da G nicht bipartit, ist X aperiodisch

$\Rightarrow$ $Pf = f$ hat eine eindeutige Lösung mit $\langle f, e \rangle = 1$.

Wir definieren weitere Zentralitätsmaße:

Definition 11.3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u \in V$.

1. Die Grad-Zentralität von u ist

$$C_D(u) := \deg(u).$$

2. Die Nähe-Zentralität von u ist

$$C_C(u) := \frac{1}{\sum_{v \in V} \operatorname{dist}(u,v)},$$

wobei $\operatorname{dist}(u,v)$ = Länge eines kürzesten Pfades von u nach v.

3. Die Harmonische Zentralität von u ist

$$C_H(u) = \sum_{v \in V} \frac{1}{\operatorname{dist}(u,v)}.$$

4. Die Zwischen-Zentralität von u ist

$$C_B(u) = \sum_{x,y \in V \setminus \{u\},\, x \neq y} \frac{\sigma_{x,y}(u)}{\sigma_{x,y}},$$

wobei $\sigma_{x,y}$ = # kürzester Pfade von x nach y

$\sigma_{x,y}(u)$ = —"— , die durch u gehen.

5. Die Markov-Zentralität von u ist

$$C_M(u) = \frac{1}{\sum_{v \in V \setminus \{u\}} \mathbb{E}\, \tau(u,v)},$$

wobei $\tau(u,v) = \min\{t \mid (X_t = u \mid X_0 = v)\}$ und X der uniforme Markov-Prozess auf G ist.