Vorlesung 21 Simpliziale Komplexe

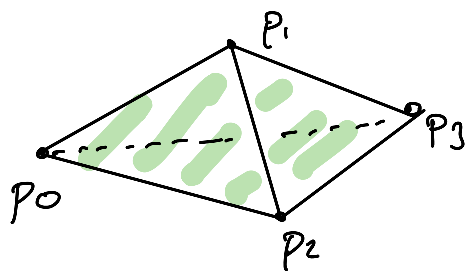
Definition 21.1

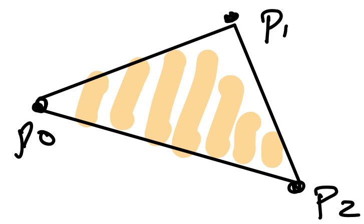
Sei $P := \{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^D$ affin unabhängig (d.h. $p_0, \dots, p_n$ liegen nicht auf einem $(n-1)$-dim. lin. Raum). Der n-Simplex zu P ist

$$\Delta = \Delta(P) = \{x \in \mathbb{R}^D \mid x = \sum_{i=0}^n t_i p_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i > 0\}$$

Beispiel 21.2

$D=3,\ n=4$ $\qquad$ $D=2,\ n=3$





Definition 21.3

Sei Δ der Simplex aufgespannt von $P = \{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^D$. Sei $I \subseteq \{0, \dots, n\}$. Sei $|I| = m < n+1$. Der Simplex $\sigma_I := \Delta(\{p_i \mid i \in I\})$ aufgespannt von den Punkten in I heißt <u>m-Facette</u> von Δ. Wenn $|I| = n$, dann nennen wir σ_I <u>Facette</u> von Δ.

Der <u>Rand</u> von Δ ist $\Gamma(\Delta) := \{\sigma_I \mid I \subsetneq \{0, \dots, n\}\}$.

Definition 21.4

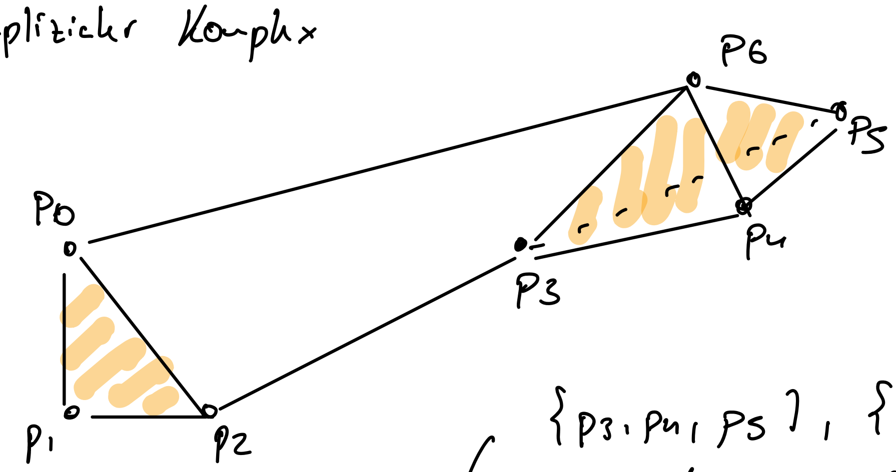
Ein <u>simplizialer Komplex</u> K ist eine endliche Vereinigung von Simplices, s.d.

1) Für alle $\Delta \in K$ und alle Facetten σ von Δ ist $\sigma \in K$.

2) Für $\sigma, \Delta \in K$ mit $\bar{\Delta} \cap \bar{\sigma} \neq \emptyset$, dann ist $\bar{\Delta} \cap \bar{\sigma}$ ein Facette von Δ und σ.

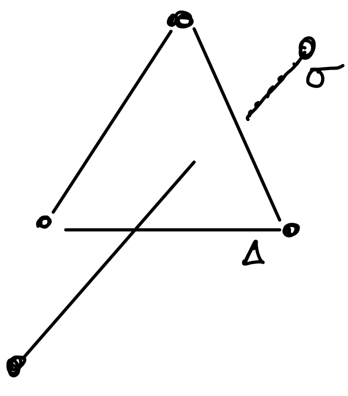
<u>Beispiel 21.5</u> $\boxed{D=3}$

1) Simplizialer Komplex



$K = \{ \{p_3, p_4, p_5, p_6\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_4, p_5, p_6\}, \{p_3, p_4, p_6\}, \{p_3, p_5, p_6\}, \{p_0, p_1, p_2\},$
$\{p_3, p_4\}, \{p_5, p_5\}, \{p_5, p_6\}, \{p_3, p_5\},$
$\{p_0, p_6\}, \{p_2, p_3\},$
$\{p_0, p_1\}, \{p_1, p_2\}, \{p_0, p_2\},$
$\{p_0\}, \ldots, \{p_6\},$
$\emptyset \}$

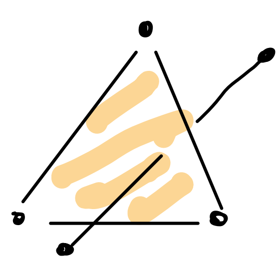
2) D=3



Dann $\bar{\Delta} \cap \bar{\sigma} = \emptyset$.

$\rightsquigarrow$ ist ein simplizialer Komplex.

ABER:



ist <u>kein</u> simplizialer Komplex.
weil $\bar{\Delta} \cap \bar{\sigma}$ keine Facette.

Definition 21.6

- Sei $\Delta = \Delta(P)$, $P = \{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^D$, ein Simplex. Die Dimension von Δ ist $\dim \Delta = n$.

- Sei K ein simplizialer Komplex. Dann ist
$$\dim K := \max_{\Delta \in K} \dim \Delta.$$

- Das m-Skelett von K ist
$$K^{(m)} := \{\Delta \in K \mid \dim \Delta \leq m\}.$$

Das 0-Skelett nennen wir die Knoten von K

Beobachtung: das 1-Skelett von K ist ein Graph.

Wir können jeden Simplex $\Delta \in \underbrace{K}_{\text{simplizialer Komplex}} \subset \mathbb{R}^D$ durch Angabe seine Knoten $\Delta^{(0)}$ eindeutig identifizieren. Das 0-Skelett $\alpha := \Delta^{(0)}$ hat die Eigenschaft, dass: alle Teilmengen $\beta \subset \alpha$ sind das 0-Skelett eines Simplex' in K.

Definition 21.7

Ein abstrakter simplizialer Komplex A mit Knoten $\{0, \dots, n\}$ ist eine Menge von Teilmengen $\{\alpha \subset \{0, \dots, n\}\}$ s.d.: für alle $\alpha \in A$ und alle $\beta \subset \alpha$ gilt: $\beta \in A$.

Die Dimension von $\alpha \in A$ ist $\dim \alpha := |\alpha| - 1$

und $\dim A := \max_{\alpha \in A} \dim \alpha.$

$\rightsquigarrow$ Falls $\dim A = 1$, ist A ein Graph!

<u>Klar:</u> Jeder geometrische simpliziale Komplex definiert einen abstrakten simplizialen Komplex.

<u>Lemma 21.8</u>

Sei A ein abstrakter simplizialer Komplex von Dimension $d = \dim A$. Dann kann A geometrisch in $\mathbb{R}^{2d+1}$ realisiert werden.

<u>Beweis</u>

Sei A ein abstrakter simplizialer Komplex auf $\{0, \dots, n\}$.

Für alle $\alpha \in A$ gilt $|\alpha| \leq d+1$. Daher:

Für alle $\alpha, \beta \in A$ gilt $|\alpha \cup \beta| \leq 2(d+1)$.

Wir finden eine Funktion $h: \{0, \dots, n\} \to \mathbb{R}^{2d+1}$, so dass $h(\alpha \cup \beta)$ affin unabhängig für alle $\alpha, \beta \in A$.

Sei $\alpha \in A$ fest und $\Delta_\alpha := \Delta(h(\alpha)) \subset \mathbb{R}^{2d+1}$

<u>Behauptung:</u> $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ist ein simplizialer Komplex.

Wir müssen zeigen: Für alle $\alpha, \beta \in A$ und $x \in \overline{\Delta_\alpha} \cap \overline{\Delta_\beta}$ gilt:

$x \in \overline{\Delta_{\alpha \cap \beta}}$.

Dazu: Das 0-Skelett von Δ_α ist $h(\alpha)$, das 0-Skelett von Δ_β ist $h(\beta)$. D.h., wir haben für $x \in \overline{\Delta_\alpha} \cap \overline{\Delta_\beta}$:

$$x = \sum_{i \in \alpha} t_i \, h(i) + \sum_{j \in \beta} s_j \, h(j),$$

weil $x \in \overline{\Delta(h(\alpha \cup \beta))}$ mit eindeutigen Koeffizienten t_i, s_j.

Da $x \in \overline{\Delta_\alpha}$ ist, gilt: $s_j = 0$, wenn $j \notin \alpha$.
Da $x \in \overline{\Delta_\beta}$ ist, gilt: $t_i = 0$, wenn $i \notin \beta$.

$$\Rightarrow x = \sum_{i \in \alpha\cap\beta} t_i h(i) + \sum_{j \in \alpha\cap\beta} s_j h(j) \in \overline{\Delta_{\alpha\cap\beta}}. \quad \square$$

<u>Wie ordnen wir Daten einen simplizialen Komplex zu</u>?

Oft haben Daten eine natürliche Interpretation als simpliziale Komplexe. Zum Beispiel, ang. die Daten sind gegeben durch ein Netzwerk von $n+1$ Objekten $\{0,\dots,n\}$, dann kann ein simpl. Komplex A Beziehungen in diesem Netzwerk modellieren: $\alpha \in A$, falls die Objekte in α eine gemeinsame Beziehung.

In anderen Situationen haben wir Datenpunkte im $\mathbb{R}^D$. In diesem Fall gibt es zwei zentrale Ansätze den Daten einen Komplex zuzuordnen.

<u>Definition 21.9</u>

Sei $P = \{p_0,\dots,p_n\} \subset \mathbb{R}^D$ eine Datenmenge. Sei $r > 0$.

1) Der Čech-Komplex bzgl. P zum Level r ist

$$C_r(P) := \{\alpha \subset \{0,\dots,n\} \mid \bigcap_{i\in\alpha} B_r(p_i) \neq \emptyset\},$$

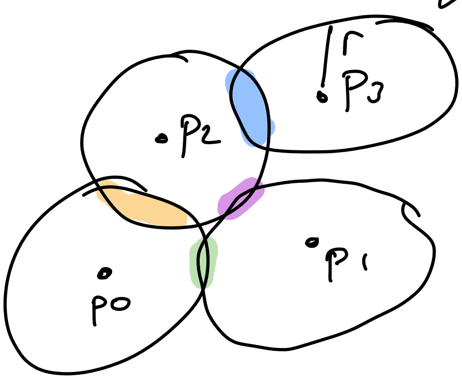
wobei $B_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^D \mid \|p-q\| < r\}$.

2) Der Vietoris-Rips-Komplex bzgl. P zum Level r ist

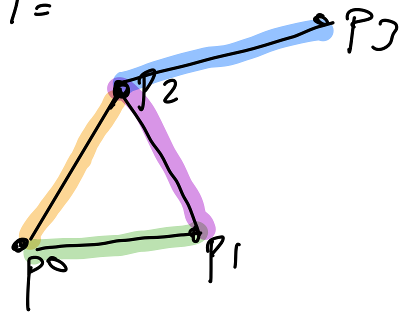
$$VR_r(P) := \{ \alpha \subset \{0, \dots, n\} \mid \max_{i,j \in \alpha} \|p_i - p_j\| \leq 2r \}.$$

<u>Beispiel</u> 21.10

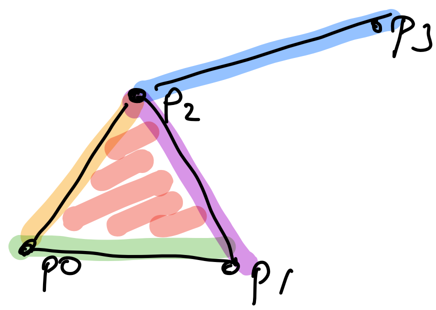
(Kreise vom Radius r!)



$C_r(P) =$



$VR_r(P) =$



Dreieck ist gefüllt, weil

$\|p_0 - p_1\| \leq 2r$

$\|p_1 - p_2\| \leq 2r$

$\|p_2 - p_0\| \leq 2r$.