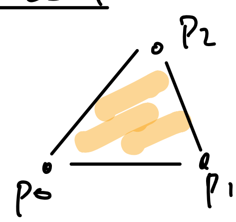
Vorlesung 23 Homologie cont'd

Zuletzt haben wir den <u>freien $\mathbb{F}_2$-Vektorraum</u> über den n-Simplices in einem simplizialen Komplex K definiert.

$$C_n(K) = \mathcal{F}(\{n\text{-simplices in } K\})$$

Wir sehen $C_{-1}(K) = \{0\}$.

Beispiel 23.1



$$C_1(K) = \{ a \cdot \{p_0, p_1\} + b\{p_0, p_2\} + c \cdot \{p_1, p_2\} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \}$$

$$C_0(K) = \{ a\{p_0\} + b\{p_1\} + c\{p_2\} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \}.$$

$$C_2(K) = \{ a \cdot \{p_0, p_1, p_2\} \mid a \in \mathbb{F}_2 \}$$

Definition 23.2

Der Randoperator ist die <u>lineare Abbildung</u>

$$\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K).$$

definiert als

$$\partial_n(\{p_0, \dots, p_n\}) = \sum_{i=0}^{n} \{p_0, \dots, p_n\} \setminus \{p_i\}$$

In obigem Beispiel: $\partial_2(\{p_0, p_1, p_2\}) = \{p_0, p_1\} + \{p_1, p_2\} + \{p_0, p_2\}$

Proposition 23.3

Für alle $n \geq 1$: $\quad \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0.$

Beweis

Sei $\{p_0, \dots, p_n\} \in C_n(K)$. Dann gilt:

$$(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(\{p_0, \dots, p_n\}) = \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} \{p_0, \dots, p_n\} \setminus \{p_i\} \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n,\, i \neq j} \{p_0, \dots, p_n\} \setminus \{p_i, p_j\} = 0,$$

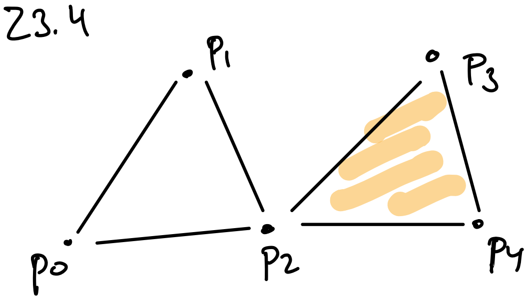
weil jeder Summand 2-mal vorkommt. □

Proposition impliziert, dass $\mathrm{Im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$

Wir wissen auch, dass $\mathrm{Im}(\partial_n)$ alle Ränder von n-Simplices in K umfasst. Dagegen interpretieren wir $\ker(\partial_{n-1})$ als Menge aller (n-1)-dim potentiellen Ränder in K.

D.h. die Diskrepanz zwischen $\mathrm{Im}(\partial_n)$ und $\ker(\partial_{n-1})$ beschreibt Löcher mit (n-1)-dim. Rand.

Beispiel 23.4



$$v = \{p_2, p_3\} + \{p_3, p_4\} + \{p_2, p_4\} \in \mathrm{Im}(\partial_2)$$

$$w = \{p_0, p_1\} + \{p_0, p_2\} + \{p_1, p_2\} \in \ker(\partial_1)$$

w und $v+w$ beschreiben das gleiche Loch, wobei $v+w$ nur eine extra Runde um das rechte Dreieck geht.

w und $v+w$ werden in $\ker(\partial_1)/\mathrm{Im}(\partial_2)$ identifiziert.

Wir interpretieren die Elemente in $\ker(\partial_1)/\mathrm{Im}(\partial_2)$ als Löcher!

Definition 23.5

Sei K ein simplizialer Komplex. Der n-te Homologie Vektorraum von K ist

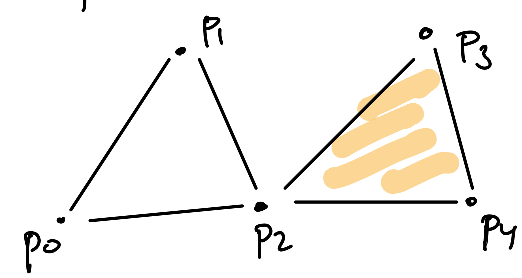
$$H_n(K) := \ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

Die n-te Betti-Zahl ist $\beta_n(K) := \dim H_n(K)$.

Wir interpretieren $\beta_n(K)$ als die Anzahl der Löcher in K mit n-dimensionalen Rand.

Wir werden gleich zeigen, dass $\beta_0(K) = \#$ Zusammenhangskomp von K.

Beispiel 23.6.



$$C_2(K) = \mathrm{span}(\{p_2, p_3, p_4\})$$

$$C_1(K) = \mathrm{span}(\{p_0, p_1\}, \{p_1, p_2\}, \{p_0, p_2\}, \{p_2, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{p_3, p_4\})$$

$$C_0(K) = \mathrm{span}(\{p_0\}, \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_4\}).$$

$$\mathrm{Im}(\partial_2) = \mathrm{span}(\underbrace{\{p_2, p_3\} + \{p_2, p_4\} + \{p_3, p_4\}}_{v})$$

$$\ker(\partial_2) = \mathrm{span}\{v, w\}, \qquad w = \{p_0, p_1\} + \{p_2, p_1\} + \{p_0, p_2\}$$

$$H_1(K) \cong \mathrm{span}\{w\} \quad \to \quad \beta_1(K) = 1.$$

$$\mathrm{Im}(\partial_1) = \mathrm{span}\{p_0 + p_1, p_1 + p_2, p_2 + p_3, p_3 + p_4\}$$

$$\ker(\partial_0) = \mathrm{span}\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\} = C_0(K)$$

$$= \mathrm{span}\{p_0, p_0 + p_1, p_1 + p_2, p_2 + p_3, p_3 + p_4\}$$

$$\to \quad H_0(K) \cong \mathrm{span}\{p_0\} \quad \to \quad \beta_0(K) = 1.$$

Lemma 23.7

Sei K ein simplizialer Komplex. Dann ist $\beta_0(K) = \#$ Zusammenhangs. von K.

Beweis

Seien $K_1, \ldots, K_m$ die Zusammenhangskomp. von K.

Seien die Knoten in der i-ten Komponente

$$K_i^{(0)} = \{ p_0^{(i)}, \dots, p_{m_i}^{(i)} \}$$

Es ist $\ker(\partial_0|_{K_i}) = C_0(K_i)$. Wir haben eine Basis:

$$\ker(\partial_0|_{K_i}) = \operatorname{span}\left(p_0^{(i)}, p_0^{(i)} + p_1^{(i)}, \dots, p_0^{(i)} + p_{m_i}^{(i)} \right)$$

Andererseits:

$$\operatorname{Im}(\partial_1) = \operatorname{span} \bigcup_{i=1}^{m} \{ p_0^{(i)} + p_1^{(i)}, \dots, p_0^{(i)} + p_{m_i}^{(i)} \}$$

$$\rightsquigarrow \quad H_0(K) = \operatorname{span}\underbrace{\{ p_0^{(1)}, \dots, p_0^{(m)} \}}_{\text{Basis!}}$$

$$\Rightarrow \quad \dim H_0(K) = \beta_0(K) = m. \qquad \square.$$

In Thm 22.4 haben wir folgende Gleichung bewiesen:

$$\beta_0(K) - \beta_1(K) = \#\{\text{Knoten}\} - \#\{\text{Kanten}\} + \#\{\text{Dreiecke}\} = \chi(K).$$

für einen Komplex in $\mathbb{R}^2$.

Wir verallgemeinern das zu allgemeinen Komplexen.

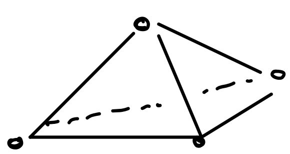
Definition 23.8

Sei K ein simplizialer Komplex und set $k_i := \#$ i-dim Simplices in K.

Die <u>Euler-Characteristic</u> von K ist

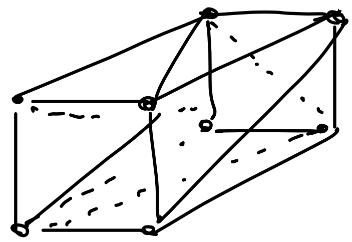
$$\chi(K) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i k_i.$$

Beispiel 23.9.

T = 

$$\chi(T) = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\beta_0(T) = 1, \quad \beta_1(T) = 0, \quad \beta_2(T) = 1$$

$W =$ 

$\chi(W) = 8 - 18 + 12 = 2$

$\beta_0(W) = 1, \quad \beta_1(W) = 0, \quad \beta_2(W) = 1$

<u>Theorem</u> 23.9 (Euler-Poincaré Formel).

Sei K ein simplizialer Komplex. Es gilt:

$$\chi(K) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \beta_i(K).$$

<u>Beweis</u>

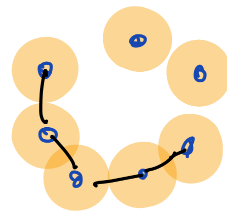
Es ist $k_i = \dim C_i(K) = \dim(\ker(\partial_i)) + \dim(\mathrm{Im}(\partial_i))$ mit $\dim(\mathrm{Im}(\partial_0)) = 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \geq 0} (-1)^i \beta_i(K) \\
&= \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\dim \ker(\partial_i) - \dim \mathrm{Im}(\partial_{i+1})) \\
&= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \ker(\partial_i) + (-1)^{i+1} \dim \mathrm{Im}(\partial_{i+1}) \\
&= \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\dim \ker(\partial_i) + \dim \mathrm{Im}(\partial_i)) \\
&= \sum_{i \geq 0} (-1)^i k_i
\end{aligned}$$

$\square$

Diese Ideen helfen uns nun in TDA.
Wir haben nun Konzepte entwickelt Löcher algebraisch zu definieren und auszurechnen.
Dies führt zu folgendem Algorithmus in TDA:

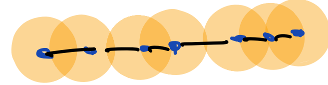


<u>Input</u>: Daten $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^D$, $r > 0$.

1.) Berechne $K = C_r(P)$ oder $K = VR_r(P)$.

2) Berechne $\beta_n(K)$, $n = 0, 1, \dots$

3) Return $\beta_n(K)$, $n = 0, 1, \dots$



Das Problem dabei ist die Wahl von r

r zu klein $\rightsquigarrow$ wir sehen nur einzelne Punkte

r zu groß $\rightarrow$ Löcher werden geschlossen.

Idee um das Problem zu umgehen: <u>Persistent Homology</u>.

Ansatz: Anstatt ein festes r zu wählen, lassen wir r über ein Intervall laufen.

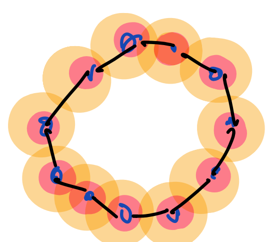
<u>Input</u>: Daten $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^D$, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_m$

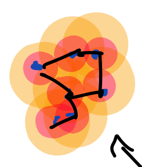
1.) Berechne $K_i = C_{r_i}(P)$ oder $K_i = VR_{r_i}(P)$. $i = 1, \dots, m$

2) Berechne $\beta_n(K_i)$, $n = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, m$.

3) Return $\beta_n(K_i)$, $n = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, m$.

Dabei interpretieren wir Betti Zahlen, die für viele aufeinanderfolgende r_i konstant bleiben, als echte Signale der Daten.

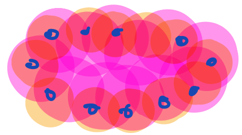


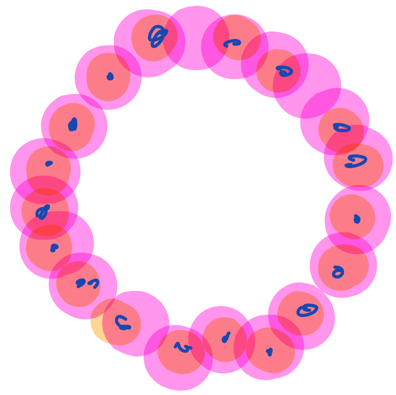


Loch schließt sich schnell $\rightsquigarrow$ Noise.

Loch bleibt für eine Weile bestehen $\rightsquigarrow$ echtes Signal

Es gibt immer noch ein Problem. Betrachte folgendes Szenario:





$\beta_1(K_1) = 1$ $\quad\quad\quad\quad$ $\beta_1(K_2) = 1$

wir sehen den linken Kreis $\quad\quad$ wir sehen nur den rechten Kreis.

Aber es kann sein, dass sich der linke Kreis etwa zu dem Radius schließt, wenn der rechte Kreis entsteht.

Dazu müssen wir persistente <u>Betti-Zahlen</u> definieren