Vorlesung 24 Persistente Homologie

Erinnerung Betti-Zahlen eines simplizialen Komplexes K:

$$\beta_n(K) = \dim \ker(\partial_n) / \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

Interpretation: $\beta_n(K) = \#$ n-dim Löcher in K

$= \#$ Löcher in K mit n-dim. Rand.

(D.h. $\triangle$ = 1-dim Loch).

Wir wollen nun zusätzlich verstehen, welche Löcher in $K_r = VR_r(P)$ oder $K_r = C_r(P)$ ($P = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^D$) wann entstehen und geschlossen werden.

Dazu benötigen wir eine Definition:

Definition 24.1

Eine Kette von simplizialen Komplexen der Form

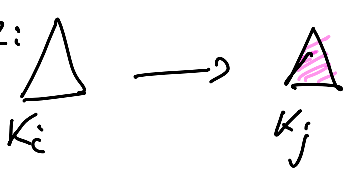
$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m$$

heißt *Filtration* von Länge m.

In unserem Setting haben wir Radii $r_1 < r_2 < \dots < r_m$ und eine Filtration $K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m$ mit $K_i = VR_{r_i}(P)$.

(oder $K_i = C_{r_i}(P)$).

Seien nun $i<j$. Wir wollen verstehen, welche Löcher in K_i auch in K_j vorhanden. Bsp:



(Loch ist verschwunden)

Dazu seien jetzt K, K' simplizial Komplexe und
$$f : K \to K' \quad \text{mit } f(n\text{-dim Simplices}) \subseteq n\text{-dim Simplices}$$
eine Abbildung. f induziert eine <u>Lineare Abbildung</u>
$$f : C_n(K) \to C_n(K')$$
$$\sum_{\Delta\ n\text{-simplices in } K} a_\Delta \cdot \Delta \longmapsto \sum_{\Delta\ n\text{-simplices in } K} a_\Delta \cdot f(\Delta).$$

<u>Definition 24.2</u> abstrakte

Seien K, K' abstrakte simpliziale Komplexe, $f : K \to K'$ wie oben.
Wir nennen f <u>stetig</u>, wenn für alle n gilt:
$$\partial_n' \circ f = f \circ \partial_n$$

Für einen simplizialen Komplex K mit Randoperator ∂_n definieren wir
$$Q_n : \ker(\partial_n) \to H_n(K) = \ker(\partial_n) / \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$$
die Quotientenabbildung.

<u>Lemma</u> 24.3

Seien K, K' simpliziale Komplexe mit Quotientenabbildungen Q_n, Q_n'. Sei $f : K \to K'$ stetig. Dann haben wir eine wohldefinierte Lineare Abbildung
$$f_* : H_n(K) \to H_n(K').$$
mit
$$f_*(Q_n(v)) := Q_n'(f(v)). \quad , v \in \ker(\partial_n).$$

<u>Beweis</u> Wir müssen zeigen, dass $Q_n'(f(v)) = Q_n'(f(w))$ für $v - w \in \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$. Da f und Q_n' linear sind, genügt

es zu zeigen, dass $Q_n'(f(v-w))=0$, d.h. $f(v-w) \in \mathrm{Im}(\partial_{n+1}')$.
Sei $u \in C_{n+1}(K)$ mit $v-w = \partial_{n+1}(u)$. Dann:

$$f(v-w) = (f \circ \partial_{n+1})(u) = (\partial_{n+1}' \circ f)(u)$$
$$= \partial_{n+1}'(f(u)) \in \mathrm{Im}(\partial_{n+1}')$$

□

Wir betrachten nun folgende stetige Abbildungen für unsere Filtration $K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m$.

$$\iota_{ij} : K_i \longrightarrow K_j, \ \Delta \longmapsto \Delta, \qquad i<j.$$

d.h. ι_{ij} ist die Einbettung von K_i in K_j.
Nach Lemma 24.3 erhalten wir lineare Abbildungen

$$(\iota_{ij})_* : H_n(K_i) \longrightarrow H_n(K_j).$$

Das Bild von $(\iota_{ij})_*$ misst welche Löcher in K_i auch in K_j vorhanden sind.

<u>Definition</u> 24.4
Sei $K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m$ eine Filtration von simplizialen Komplexen mit Einbettung $\iota_{ij} : K_i \to K_j$, $i<j$. Die n-te persistente Betti-Zahl des Komplexes ist

$$\beta_n^{i,j} := \dim \mathrm{Im}((\iota_{ij})_*).$$
$$= \# \text{ Löcher in } K_i \text{, die auch in } K_j \text{ vorhanden sind.}$$

<u>Proposition</u> 24.5
Die Anzahl $\underset{n\text{-dim}}{\smile}$ Löcher, die zum Index i erscheint und zum

Index j verschwindet, ist

$$\mu_n^{i,j} := (\beta_n^{i,j-1} - \beta_n^{i,j}) - (\beta_n^{i-1,j-1} - \beta_n^{i-1,j})$$

<u>Beweis</u>

$(\beta_n^{i,j-1} - \beta_n^{i,j})$ = # Löcher, die zum Index i vorhanden sind und zum Index j verschwinden

$(\beta_n^{i-1,j-1} - \beta_n^{i-1,j})$ = # Löcher, die zum Index $i-1$ vorhanden sind und zum Index j verschwinden $\square$

<u>Algorithmus</u> (Persistente Homologie)

1. Berechne Filtration $K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_m$ mit $K_i = VR_{r_i}(P)$ (oder $K_i = C_{r_i}(P)$)
2. Für alle $1 \leq i < j \leq m$ und $0 \leq n \leq \dim K_i - 1$ berechne $\mu_n^{i,j}$ wie in Prop. 24.5.
3. Return $\mu_n^{i,j}$.

Üblicherweise werden die $\mu_n^{i,j}$ in einem <u>Barcode-Plot</u> oder <u>Persistenz-Diagram</u> visualisiert